Exercice 1

A/

① $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

par croissance comparée

② Calcul de la dérivée :

$h'(x) = 1 e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

e^{-x} étant toujours positif, on étudie le signe de $1-x$ qui donne celui de $h'(x)$.

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

③ a) $e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - e^{-x}(1-x)$

$= e^{-x}(1 - (1-x))$

$= x e^{-x}$

$= h(x)$

l'égalité est vérifiée

b) Une primitive de $x \mapsto e^{-x}$

est $x \longmapsto -e^{-x}$

c) Appelons H une fonction primitive de h

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$

donc $H(x) = -e^{-x} - h(x)$

$$= -e^{-x} - x e^{-x}$$

$$= \underline{e^{-x}(-x-1)}$$

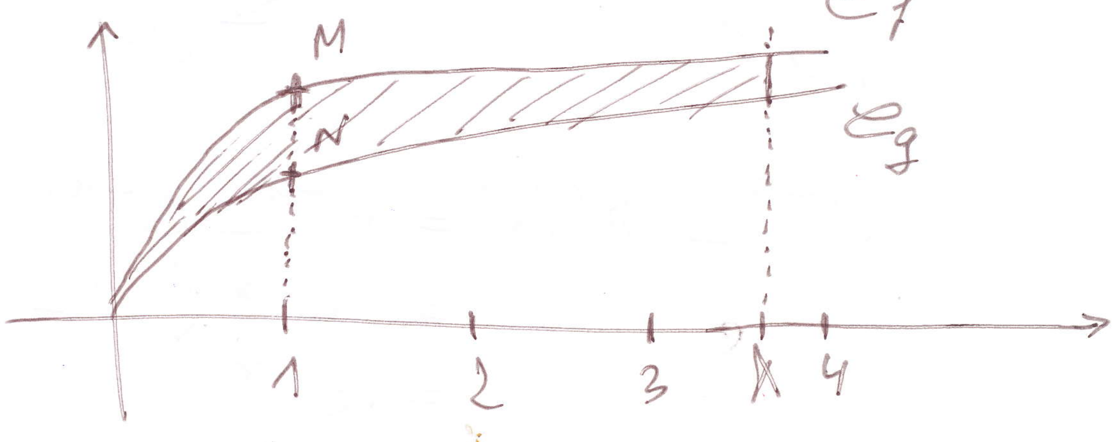
B) ① a) $MN(x) = f(x) - g(x)$

$$= x e^{-x}$$

$$= h(x)$$

Donc comme pour $h(x)$, MN atteint son maximum pour $x = 1$

b)



② b/ $A_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\,dx$

$= \int_0^\lambda h(x)\,dx$

$= H(\lambda) - H(0)$

$= e^{-\lambda}(-\lambda - 1) - e^0(-1)$

$= -\frac{\lambda+1}{e^\lambda} + 1$

$= 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}$

c/ $A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}$

$= 1 - \frac{\lambda}{e^\lambda} - \frac{1}{e^\lambda}$

$= 1 - \frac{1}{\frac{e^\lambda}{\lambda}} - \frac{1}{e^\lambda}$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^\lambda}{\lambda}} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0$

par croissance comparée

donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda = 1$: Quand λ devient très grand, l'aire hachurée tend vers 1.

③ a) $A_3 \simeq 0,8008$

donc l'algorithme affichera la <u>valeur 3</u>

b) L'algorithme donne la plus petite valeur entière de λ telle que $A_\lambda \geq S$

Exercice 2

① En remplaçant les coordonnées de A dans l'équation du plan $\mathcal{P}$:

$$2 \times 1 - a^2 - 3 = -a^2 - 1$$

$-a^2-1$ est toujours strictement négatif donc ne s'annule pas. Donc $A \notin \mathcal{P}$

② a) Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ sera un vecteur normal de $\mathcal{P}$ de coordonnées $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$

D'où le système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2}$

$= \sqrt{(2t)^2 + 0^2 + (-t)^2} = \sqrt{5t^2}$

③ Cherchons les coordonnées de H, intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x et z dans la dernière équation :

$$2(1+2t) - (a^2 - t) - 3 = 0$$

$$2 + 4t - a^2 + t - 3 = 0$$

$$t = \frac{a^2+1}{5}$$

$$x = 1 + 2 \times \frac{a^2+1}{5} = 1 + \frac{2a^2+2}{5} = \frac{2a^2+7}{5}$$

$$y = a$$

$$z = a^2 - \frac{a^2+1}{5} = \frac{4a^2-1}{5}$$

donc $H\left(\frac{2a^2+7}{5} ; a ; \frac{4a^2-1}{5}\right)$ et $A(1 ; a ; a^2)$

$$AH^2 = \left(\frac{2a^2+7}{5} - 1\right)^2 + (a-a)^2 + \left(\frac{4a^2-1}{5} - a^2\right)^2$$

$$= \left(\frac{2a^2+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{-a^2-1}{5}\right)^2$$

$$= 4\left(\frac{a^2+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{a^2+1}{5}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{5}\right)^2$$

$$AH^2 = \frac{(a^2+1)^2}{5}$$

donc $AH = \dfrac{a^2+1}{\sqrt{5}}$

La fonction $a \longmapsto a^2+1$ atteint son minimum pour $a=0$: c'est la valeur de a pour laquelle la distance de A à $\mathcal{P}$ est minimale.

Exercice 3

A) (1) proposition C

(2) a) secteur G4

b) $z = -45\sqrt{3} + 45i$

$= 90\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 90e^{i\frac{5\pi}{6}}$

donc secteur D5

B) (1) $p(M < 0) \simeq 7{,}6 \times 10^{-24} \simeq 0$

La probabilité que la distance de l'impact au point O soit négative est nulle ou négligeable.

(2) $p(M \in]40;60[) = 0{,}954$

③ $$p_{I_2}(M_1) = \frac{p(I_2 \cap M_1)}{p(I_2)}$$

$$= \frac{p(M_1) \times p_{M_1}(I_2)}{p(I_2)}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,35}{0,2025}$$

$$= \underline{0,086}$$

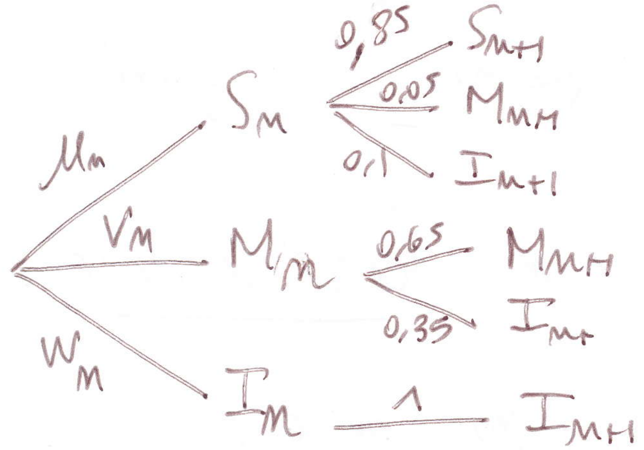
B) Chaque individu peut, à l'exclusion de toute autre possibilité, être soit de type S, soit de type M, soit de type I.
S, M et I forment donc une partition de l'univers Ω donc :

$$p(S_n) + p(M_n) + p(I_n) = u_n + v_n + w_n$$
$$= p(\Omega)$$
$$= 1$$

a) Dans C3 on a saisi :
= 0,65*C2 + 0,05*B2

b) N = 4

③ a) On construit l'arbre pour la semaine n :



$$u_{n+1} = p(S_{n+1}) = p(S_n) \times p_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85\, u_n$$

b) Au rang 0 :

$$v_0 = \frac{1}{4}\left(0,85^0 - 0,65^0\right) = 0 = p(M_0)$$

donc la propriété est vraie au rang 0

Supposons que pour un entier naturel n fixé on ait : $v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$.

$$v_{n+1} = 0,65\, v_n + 0,05\, u_n$$
$$= 0,65 \times \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right) + 0,05 \times u_0 \times 0,85^n$$
$$= 0,1625 \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} + 0,05 \times 1 \times 0,85^n$$
$$= (0,1625 + 0,05)\, 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1}$$
$$= 0,2125 \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1}$$
$$= \frac{1}{4} \times 0,85 \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} \times 0,85^{n+1} - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right)$$

La propriété est bien <u>héréditaire</u>.

<u>Donc</u> quelquesoit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$$

4) $u_n = 0,85^n$

On $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$$

$$-1 < 0,65 < 1$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,65^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

$w_n = 1 - u_n - v_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$